Прикладная математика для юных

Курс для старших классов

В. А. Гордин, проф., д. ф.-м.н.

ПЕРВЫЕ ЗАНЯТИЯ

Рассматриваемые модели относятся к теории вероятностей и к теории игр. Однако методы, которые позволят нам решить поставленные задачи, опираются на конечно-разностные уравнения. А конечно-разностные уравнения похожи (особенно, если речь идет о линейных уравнениях с постоянными коэффициентами) на уравнения дифференциальные: обыкновенные и в частных производных. Все эти разделы математики скреплены естественными с математической точки зрения логическими связями.

1. Модель блужданий

Рассмотрим блуждание частицы по сетке, узлы которой перенумерованы: $[0,1,\dots N]$. Это блуждание происходит по следующим правилам: с вероятностью q частица смещается вправо, с вероятностью (1-q) – влево; см. **рис. 1.1**.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 1-q & & q & & & & & \\
 & & & \Leftarrow & & \Rightarrow & & & & & \\
* & - - - - - - & & * & - - - * & - - - & * & - - - - - - - - - - & & & *\\
0 & \dots & \dots & n-1 & n & n+1 & \dots & \dots & \dots & & N
\end{array}
$$

Рис. 1.1. Вероятности движения частицы за один шаг из точки с номером n.

Акт смещения частицы занимает время τ. Расстояние между соседними узлами равно h. На краях отрезка блуждание прекращается. Число q удовлетворяет условиям $0 < q < 1$.

Такая модель может описывать не только случайное (стохастическое) движение частицы (до появления атомной физики в этой вероятностной модели говорили о блуждании пьяного человека). Модель также описывает динамику азартной *игры с постоянной суммой* (т. е. сколько проиграет один игрок, столько и выиграет второй). Движение направо означает, что 1-й игрок выиграл 1 ставку (а 2-й ее проиграл), а движение налево – победу 2-го игрока в этом розыгрыше. Число N означает постоянное количество ставок в этой игре. На краях (т. е. при условии, что один из игроков проиграл все ставки, или, что пьяный свалился с обрыва) движение (игра) прекращается.

Заметим, что при одних сценариях игра кончится за конечное время (например, всегда будет выигрывать тот игрок, у которого в начале игры было больше ставок, или всегда будет выигрывать 1-й игрок), а при других сценариях игра будет длиться бесконечно (например, если игроки выигрывают строго по очереди). Оба сценария не противоречат описанию модели. Однако мы впоследствии докажем, что сценариев второго типа (состоящих из игры с бесконечным числом геймов, бесконечно долгого блуждания пьяного на конечном отрезке) очень мало. Более точная формулировка: вероятность реализации таких сценариев равна нулю.

Модель рассмотрена вероятностная, но на вопросы, которые тут возникают, лучше всего отвечает теория конечно-разностных уравнений.

2. Конечно-разностные уравнения: модели блуждания, роста банковского вклада, распада изотопа и размножения бессмертных кроликов

Пусть $P(n)$ – вероятность того что 1-й игрок, имея на руках n ставок, в конечном счете победит. Вероятность окончательной победы 2-го игрока в этом случае равна 1- $P(n)$. Сразу заметим, что $P(0)=0$, а $P(N)=1$. Какова же вероятность окончательной победы 1-го игрока при остальных n?

Все сценарии, ведущие к победе 1-го игрока, если сейчас он имеет n ставок, мы разделим на две непересекающиеся подгруппы. Поэтому интересующая нас вероятность $P(n)$ будет равна сумме вероятностей окончательной победы 1-го игрока для этих подгрупп.

Первая подгруппа получается при движении частицы на первом шагу вправо (выигрыше при первом розыгрыше 1-го игрока). Вероятность победы 1-го игрока по такому сценарию равна $qP(n+1)$. Правда, саму величину $P(n+1)$ при $n<N-1$ мы пока не знаем.

Вторая подгруппа получается при движении частицы на первом шагу влево. Вероятность окончательной победы 1-го игрока для этой подгруппы сценариев равна $(1-q)P(n-1)$. Величина $P(n-1)$ при $n>1$ также неизвестна.

Итак, мы получили линейное соотношение между тремя неизвестными вероятностями для соседних индексов:

$$P(n) = qP(n+1) + (1-q)P(n-1). \tag{2.1}$$

Эти соотношения выполняются при всех $n = 1, 2, ..., N-1$. Объединение этих соотношений представляет собой линейное однородное конечно-разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $P(n)$, определенной на сетке $1 \le n \le N-1$.

Есть модели, которые используют более простые, чем (2.1), линейные конечно-разностные линейные уравнения, – первого порядка. Рассмотрим, например, уравнение

$$S(n+1) = \left(1 + \alpha / 100\right) S(n), \tag{2.2}$$

где $S(n)$ – размер банковского вклада в n-й год после открытия вклада, α – годовой процент банка. Модификация модели: банк начисляет проценты ежемесячно. Тогда α – месячный процент банка, а n – номер месяца после открытия вклада.

Решение уравнения (2.2) очевидно:

$$S(n) = \lambda^n S(0), \textit{ где } \lambda = 1 + \alpha / 100 .$$

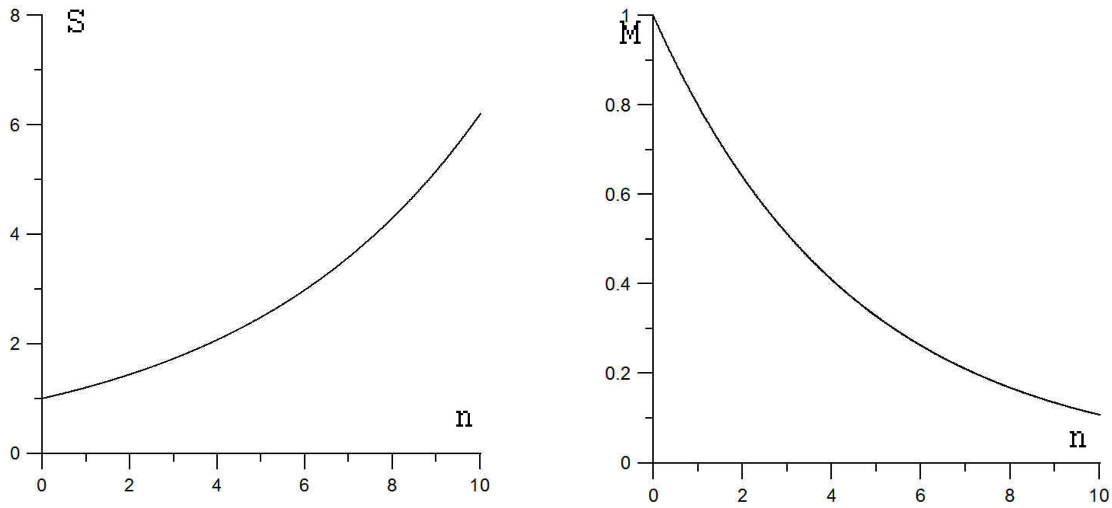

Рис. 2.1. Решение уравнений первого порядка а) (2.2) при $\lambda = 1{,}2$, б) (2.3) при $\lambda = 0{,}8$.
Здесь гладкими кривыми соединены значения *S(n)* и *M(n),* соответственно, при целых *n*.

Другая модель: распад неустойчивого изотопа, – его масса уменьшается со временем в соответствии с уравнением

$$M(n+1) = (1-\mu)M(n) \Rightarrow M(n) = \lambda^n M(0),\ где\ \lambda = 1-\mu,\ n = 1,2,\ldots . \qquad (2.3)$$

Здесь μ – часть изотопов, которая распадается за 1 год, *n* – номер года от момента начала измерений.

Замечание 3.1. Все рассмотренные уравнения можно использовать для вычисления значений *P(n), S(n)* или *M(n),* не только для положительных значений *n*, но и для отрицательных. Например, $M(-n) = \lambda^{-n} M(0),\ n = 1,2,\ldots$.

Замечание 3.2. На **рис. 2.1** и последующих приведены графики функций не дискретного, целочисленного аргумента *n* (которые и являются обычно решениями задачи) а вещественного. Интерполяция – продолжение решения на нецелые значения *n* – неоднозначная операция. Например, если к построенным графикам *S(n)* и *M(n)* прибавить график функции $A\sin(\pi K n),\ A \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{Z}$, то при целых значениях *n* график не изменится, а при любых иных значениях *n* – может измениться сколь угодно сильно. Мы здесь не будем обсуждать «оптимальный» способ интерполяции, а лишь предупредим: точный смысл имеют значения графиков лишь при целых *n*.

Наверняка читатель сталкивался еще с одним знаменитым уравнением, придуманным Леонардо, купцом из города Пизы. Фибоначчи[1] предложил в 1203 г. свою модель, описывающую динамику численности бессмертных кроликов в окруженном стеной саду. Пусть в начальный момент в саду одна пара только что родившихся кроликов, на второй месяц после рождения пара начинает ежемесячно рожать еще одну пару кроликов. Обозначим *F(n)* – количество пар кроликов, рожденных в *n*-ом году. Соответствующее линейное однородное конечно-разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$F(n+2) = F(n+1) + F(n), \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (2.4)$$

[1] Такое прозвище означало, что отца великого Леонардо звали Боначчио.

Первые числа Фибоначчи общеизвестны (см. **рис. 2.2**.):

$$F(2)=1,\ F(3)=2,\ F(4)=3,\ F(5)=5,\ F(6)=8,\ F(7)=13,\ F(8)=21,...$$

В общем случае *линейное конечно-разностное уравнение k-го порядка* (с постоянными коэффициентами, если величины $a_1,...,a_k$ – заданные константы) имеет вид:

$$u(n+k)+a_1(n)u(n+k-1)+a_2(n)u(n+k-2)+...+a_k(n)u(n)=g(n)\,. \qquad (2.5)$$

Равенство выполняется при всех целых *n*. Здесь правая часть уравнения (форсинг) – заданная функция *g(n)*, коэффициенты – функции $a_1(n),...,a_k(n)$ также заданы, причем $a_k \neq 0$.

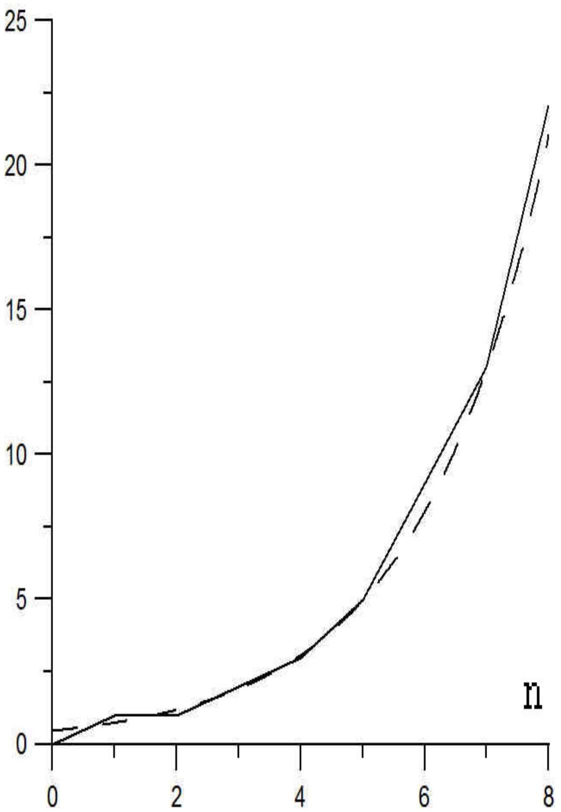

Рис. 2.2. Сплошная линия – ломаная, соединяющая числа из последовательности Фибоначчи *F(n)* – решение уравнения (2.4). Фибоначчи в своей задаче о кроликах использовал начальные условия *F(0)=0,F(1)=*1.

Чем больше значение аргумента *n*, тем больше график *F(n)* напоминает кривую на **рис. 3.1**. Соответствующая геометрическая прогрессия (пунктир) задается формулой $F_+(n)\approx C\lambda^n$, $\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, C=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Формула Бине дает точную формулу для чисел Фибоначчи:
$F(n)=\dfrac{\lambda^n-(-\lambda)^{-n}}{\lambda-(-\lambda)^{-1}}=\dfrac{\lambda^n-(-\lambda)^{-n}}{\sqrt{5}}$, а $F_+(n)$ получается из нее, если в числителе отбросить второе слагаемое, малое при больших *n*. О формуле Бине см. также **К.3.1.**

Замечание 3.3. В правой части формулы Бине участвуют только иррациональные числа, а, между тем, левая, в силу формулы (2.4), – целое число.

Линейное конечно-разностное уравнение (2.5) называется *однородным*, если при всех *n* правая часть *g(n)=0:*

$$u(n+k)+a_1(n)u(n+k-1)+a_2(n)u(n+k-2)+...+a_k(n)u(n)=0\,. \qquad (2.6)$$

В противном случае оно называется *неоднородным*. Конечно-разностные уравнения (2.1) и (2.4) – однородные, второго порядка.

В случае *линейного конечно-разностного уравнения* (2.1) *k*=2, а *коэффициенты постоянны*: $a_1=\dfrac{-1}{q}, a_2=\dfrac{1-q}{q}$. В случае уравнения (2.4) $a_1=a_2=-1$. Чтобы уравнение (2.1) имело вид (2.6), сдвинем индекс *n* в (2.1) и перепишем в виде

$$P(n+1) = qP(n+2) + (1-q)P(n) \Leftrightarrow P(n+2) - \frac{1}{q}P(n+1) + \frac{1-q}{q}P(n) = 0 \; \textit{при} \quad n = 0, 2, ..., N-2.$$

Разумеется, решением любого однородного уравнения (2.6) является последовательность, составленная из одних нулей: $u(n) = 0$ при всех $n \in \square$. Такое *решение* называется *тривиальным*.

Если найдена какая-то одна последовательность *u(n)* – нетривиальное решение однородного уравнения (2.6), то можно немедленно определить еще целое семейство: любая последовательность *Cu(n),* где *C* – отличная от нуля константа, – нетривиальное решение однородного уравнения (2.6). Если найдены какие-то последовательности *u(n)* и *v(n)* решения уравнения (2.6), то и последовательность *w(n)= v(n)+u(n)* – решение уравнения (2.6).

К.2.1. Докажите эти утверждения.

Замечание 3.4. Это утверждение можно переформулировать на языке линейной алгебры: в пространстве[2] числовых последовательностей $u(n)$, $n \in \square$ множество решений однородного уравнения (2.6) образуют *k*-мерное подпространство. Если последовательности $\{u(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $\{v(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – решения уравнения (2.6), то они однозначно определяются начальными значениями $u(0), u(2), ..., u(k-1)$ и $v(0), v(2), ..., v(k-1)$, соответственно с помощью уравнения (2.6). Начальные значения $\lambda u(0), \lambda u(2), ..., \lambda u(k-1),\ \textit{где}\ \lambda \in \square$, определяют, согласно (2.6), решение $\{\lambda u(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Начальные значения $u(0)+v(0), u(2)+v(2), ..., u(k-1)+v(k-1)$ определяют, согласно (2.6), решение $\{u(n)+v(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Значит, подпространство решений имеет размерность *k*.

Можно указать базис в этом подпространстве. Базисный вектор с номером *j*, где $0 \le j \le k-1$, дает последовательность, в которой из набора $u(0), u(2), ..., u(k-1)$ отлично от нуля лишь число с номером *j*, и это число равно 1. Для всех остальных номеров *n* (т. е. при $n \ge k$ и при $n < 0$) значения решения $u(n)$, $n \in \square$ получаются рекуррентно с помощью однородного уравнения (2.6).

К.2.2. Чему будет равно значение *u*(*k*) в каждой из этих базисных последовательностей?

Для уравнения Фибоначчи порядок *k*=2, а сама последовательность Фибоначчи (поскольку ее начальные значения <1,1>) – сумма базисных векторов, отвечающих *j*=0 и *j*=1.

Общее решение *неоднородного* (когда правая часть уравнения $g(n)$ отлична от тождественного нуля) уравнения (2.5) можно представить в виде суммы какого-то частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения (2.6). На языке линейной алгебры: множество решений неоднородного линейного уравнения (2.5) образует *k*-мерную плоскость (не содержащую нуль – тривиальное решение) в бесконечномерном пространстве всех числовых последовательностей.

К.2.3. Докажите, что размерность этой плоскости равна именно *k*.

---

[2] Это линейное пространство бесконечномерно.

Рассмотрим конечно-разностное уравнение 1-го порядка

$$u\left(n+1\right)+a_1(n)u(n)=g(n). \tag{2.7}$$

Частное решение соответствующего однородного уравнения (т. е. уравнения (2.7), в котором правая часть *g(n)* заменена нулем), удовлетворяющее условию *u(0)=1,* определяется рекуррентно:

$$U(n)=\left(-1\right)^n\prod_{j=0}^{n-1}a_1(j). \tag{2.8}$$

Общее решение однородного уравнения задается формулой $U_{общ}(n)=CU(n),$ в которую входит произвольная константа: *C*=const.

Будем теперь искать решение неоднородного уравнения (2.7) в виде $u(n)=C(n)U(n)$, где *C(n)* – неизвестная пока функция, а *U(n)* задается формулой (2.8). Понятно, что *C(n)* должна зависеть от *g(n)* – правой части уравнения (2.7). Подставим в (2.7) и получим:

$$C(n+1)U(n+1)+a_1(n)C(n)U(n)=C(n+1)U(n+1)-C(n)U(n+1)=g(n)\Rightarrow C(n+1)=C(n)+\frac{g(n)}{U(n+1)}.$$

Получаем формулу

$$C(n)=C(0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{g(j-1)}{U(j)}\Rightarrow u(n)=U(n)\left[C(0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{g(j-1)}{U(j)}\right], \tag{2.9}$$

это общее решение неоднородного уравнения определяется с точностью до общего решения однородного уравнения; здесь *C(0)* – свободная константа.

Этот метод можно обобщить на случай неоднородных конечно-разностных уравнений (2.5) порядка *k*. Если уже откуда-то известна система из *k* линейно независимых решений $\left\{U_m(n)\right\}_{m=1}^{k}$ линейного однородного уравнения (2.6) (не обязательно с постоянными коэффициентами), то можно (здесь это не доказывается) построить и частное решение неоднородного уравнения (2.5):

$$u(n)=C_1(n)U_1(n)+...+C_k(n)U_k(n),$$

где переменные коэффициенты определяются формулами:

$$C_j\left(n\right)=\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{k+p}g(l)\frac{D_p(n)}{D(n)},\ D(n)=\det\begin{pmatrix}U_1(n+1) & U_2(n+1) & ... & U_k(n+1)\\ U_1(n+2) & U_2(n+1) & ... & U_k(n+1)\\ \vdots & \vdots & ::: & \vdots\\ U_1(n+k) & U_2(n+k) & ... & U_k(n+k)\end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

а определитель этой же матрицы, но с вычеркнутыми столбцом с номером *p* и последней строкой. В этом состоит *метод вариации постоянных (метод Лагранжа).*

Это частное решение можно также записать в виде

$$u(n)=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\det\begin{pmatrix} U_1(l+1) & U_2(l+1) & \dots & \dots & U_k(l+1)\\ U_1(l+2) & U_2(l+2) & \dots & \dots & U_k(l+2)\\ \vdots & \vdots & ::: & ::: & \vdots\\ U_1(l+k-1) & U_1(l+k-1) & \dots & \dots & U_k(l+k-1)\\ U_1(n) & U_2(n) & \dots & \dots & U_k(n)\end{pmatrix} g(l)}{\det\begin{pmatrix} U_1(l+1) & U_2(l+1) & \dots & U_k(l+1)\\ U_1(l+2) & U_2(l+2) & \dots & U_k(l+2)\\ \vdots & \vdots & ::: & \vdots\\ U_1(l+k) & U_2(l+k) & . & U_k(l+k)\end{pmatrix}}.$$

Доказательство этих формул можно найти, например, в [Гельфанд].

К.2.4. Проверьте, что функции $U_1(n)=2^n$ и $U_2(n)=3^n$ – решения однородного конечно-разностного уравнения

$$u(n+2)-5u(n+1)+6u(n)=0. \qquad (2.11)$$

Определите по формуле (2.10) решение конечно-разностного уравнения второго порядка

$$u(n+2)-5u(n+1)+6u(n)=g(n), \qquad (2.12)$$

где $g(n)=1$.

Постройте на компьютере решения уравнения (2.12) с начальными условиями $u_1(0)=1, u_1(1)=0$ и $u_2(0)=0, u_2(1)=1$ для n=2,…, 50. Постройте графики. Проверьте что разность решения неоднородного уравнения, построенного по формуле (2.10), и решений $u_1(n)$ или $u_2(n)$ удовлетворяют однородному конечно-разностному уравнению (2.11).

К.2.5. То же для $g(n)=2(-1)^n; g(n)=3\sin\dfrac{\pi n}{10}$.

Замечание 2.1. Метод, который дает формулу (2.10), аналогичен одноименному методу для нахождения частного решения линейного дифференциального неоднородного уравнения по его фундаментальной системе решений и правой части, см., например [Гордин, 2010].

3. Решения линейных однородных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами (случай простых корней)

Пусть все коэффициенты однородного конечно-разностного уравнения (2.6) постоянны, т. е. при всех $j=1,\dots,k$ коэффициенты $a_j(n)=const$. Будем искать нетривиальное решение однородного уравнения (2.6) в виде $u(n)=C\lambda^n$, где C,λ – отличные от нуля константы. При подстановке в (2.6) при получим:

$$C\lambda^n\left[\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+a_2\lambda^{k-2}+\dots+a_k\right]=0.$$

Поскольку, по предположению, в нуль может обратиться лишь выражение в квадратных скобках, получаем алгебраическое *уравнение* порядка k:

$$H(\lambda) = \lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + a_2\lambda^{k-2} + \ldots + a_k = 0. \qquad (3.1)$$

Оно (как и *многочлен H*) называется *характеристическим* для конечно-разностного уравнения с постоянными коэффициентами (2.6). Из основной теоремы алгебры, см., например, [Курош], следует существование у уравнения (3.1) k штук (с учетом их кратности) корней $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$.

Все корни характеристического многочлена H отличны от нуля, поскольку, по теореме Виета, произведение корней выражается через k-й коэффициент многочлена: $\prod_{j=1}^k \lambda_j = (-1)^k a_k \neq 0$.

Предположим, что все корни характеристического многочлена $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ различны. Тогда при любом выборе констант $\{C_j\}_{j=1}^k$ функция вида

$$u(n) = \sum_{j=1}^k C_j \lambda_j^n \qquad (3.2)$$

есть решение однородного линейного конечно-разностного уравнения k-го порядка с постоянными коэффициентами (2.5).

Лемма. Если все корни $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ различны, то других решений у уравнения (2.6) не существует.

Доказательство. Функция $u(n)$ определена формулой (3.2) при всех n, а значит, и при *n=0, 2, ..., k-1,* однозначно. Обратно, если заданы значения $u(0), u(2), ..., u(k-1),$ то все константы $\{C_j\}_{j=1}^k$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&C_1 + C_2 + \ldots + C_k = u(0) \\
&C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 + \ldots + C_k\lambda_k = u(1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&C_1\lambda_1^{k-1} + C_2\lambda_2^{k-1} + \ldots + C_k\lambda_k^{k-1} = u(k-1)
\end{aligned}.$$

Определитель этой линейной системы – известный определитель Вандермонда, см., например, [Курош, «Курс высшей алгебры»]. Он отличен от нуля, так как все числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ различны.

Константы $\{C_j\}_{j=1}^k$ можно интерпретировать как коэффициенты разложения решения уравнения (2.6) по иному, нежели в **замечании 3.4**, базису в подпространстве всех решений.

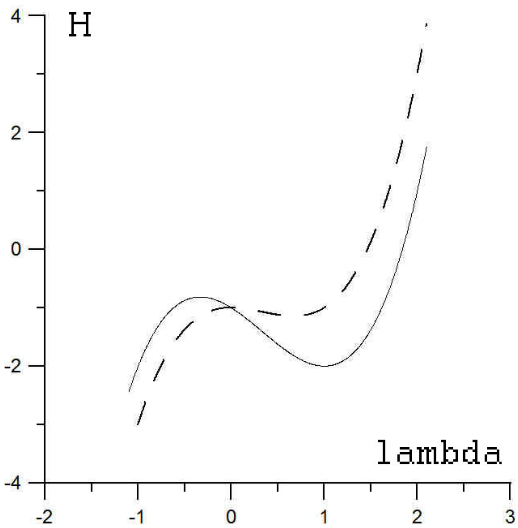

Рис. 3.1. Графики характеристических многочленов для задач **К.3.6** и **К.3.7.** Это $H(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1$ (сплошная линия) и $H(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 1$ (пунктир), соответственно. Оба многочлена имеют по одному вещественному корню и по два комплексно сопряженных.

К.3.1. Определите, при каких значениях констант C_1, C_2 решение уравнения Фибоначчи (2.4) удовлетворяет условиям *F(0)=0, F(1)=*1? Соответствующая формула для *F(n)* называется *формулой Бине*.

К.3.2. Используя формулу Бине, постройте график решения Фибоначчи *F(n)* при отрицательных *n*.

К.3.3. Возможны ли такие начальные условия *F(0), F(1),* что соответствующее решение уравнения (2.4) убывает при $n \to +\infty$? Монотонно ли это убывание? Для такого решения определите *F(0),* если *F(1)=-2.*

К.3.4. Пусть известны значения решения при идущих подряд *k* номерах, т. е. при $n = J, J+1, \ldots, J+k-1$, где $J \in \mathbb{Z}$. Докажите, что такое решение уравнения (2.6) существует и единственно. Приведите примеры для *k*=2, когда заданное при двух значениях *n* решение *u(n)* не существует или не единственно.

Рассмотрим комбинаторную задачу о количестве вариантов подъема по лестнице из *n* ступеней. Если шагать можно только на следующую ступеньку, то способ подъема единственный. А вот если можно шагать и на следующую, и через одну, то количество вариантов *K*(*n*) растет с увеличением *n*. Легко видеть, что *K(1)=1, K(2)=2, K(3)=3, K(4)=5…*

На ступеньку с номером *n* можно попасть либо со ступеньки с номером *n*-1 (маленьким шагом) или непосредственно со ступеньки с номером *n*-2 (большим шагом). Поэтому функция *K(n)* удовлетворяет уравнению Фибоначчи (2.4) с начальными условиями, приведенными выше.

К.3.5. Определите значение *K*(10). Получите формулу для *K*(*n*) при произвольном значении *n*.

К.3.6. Пусть теперь можно шагать и на следующую ступеньку, на через одну, и через две. Определите *K*(*n*) при произвольном *n*.

К.3.7. Тот же вопрос, что и в **К.3.6,** но шагать можно либо на следующую, либо через две.

К.3.8. Можно еще одним способом модифицировать задачу о числе вариантов: допустить, что на последней ступеньке можно сделать двойной шаг. И что такой вариант отличается от варианта обычного попадания на *n*-ю ступеньку. Какому конечно-разностному уравнению удовлетворяет при таких правилах число вариантов *M*(*n*)? Оцените отношение *M*(*n*)/ *K*(*n*) при больших значениях *n*.

4. Системы линейных конечно-разностных уравнений

В уравнениях (2.5, 2.6) можно предположить неизвестную функцию *x(n)* и правую часть не скалярными, а векторными функциями: $\vec{x} = \vec{x}(n),\ \vec{g} = \vec{g}(n)$, а коэффициенты уравнения – матрично-значными функциями, т. е. $A_j(n)$ матрицы при всех $j = 1,\dots,k,\ n \in$ □ . Размерности векторов и матриц совпадают. Так получаются системы конечно-разностных уравнений.

Скалярное однородное уравнение (2.6) порядка *k* можно переписать в виде *системы k однородных конечно-разностных уравнений первого порядка*:

$$\begin{pmatrix} x(n+k+1) \\ x(n+k) \\ \\ x(n+1) \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} x(n+k) \\ x(n+k-1) \\ \\ x(n) \end{pmatrix},\ \Omega = \Omega(n) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & . & -a_k \\ 1 & & & 0 \\ . & . & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

K.4.1. Запишите неоднородное скалярное уравнение (2.5) в виде неоднородной системы вида $\vec{x}(n+1) = \Omega\vec{x}(n) + \vec{g}(n)$.

K.4.2. Пусть в (4.1) матрица Ω не зависит от индекса *n* (*коэффициенты системы* (4.1) *постоянны*). Докажите, что характеристический многочлен этой матрицы совпадает с многочленом $H(\lambda)$.

K.4.3. Пусть кратность *m* корня λ_* характеристического многочлена $H(\lambda)$ больше 1. Докажите, что в жордановой структуре матрицы Ω в (4.1) корню λ_* отвечает ровно одна жорданова клетка. Следовательно, матрица Ω с кратным характеристическим корнем, но с большим числом жордановых клеток не может иметь вид (4.1). Другими словами, такая система линейных конечно-разностных уравнений первого порядка не может быть порождена скалярным линейным конечно-разностным уравнением (2.6).

Примеры уравнения (2.6) при *k*=1, т. е. уравнения вида

$$x(n+1) = -a \cdot x(n)$$

были рассмотрены в $2. Решение таких уравнений простое: $x(n) = (-a)^n\, x(0)$.

Если $|a| > 1$, то все ненулевые решения *x(n)* этого уравнения удаляются от нуля при $n \to +\infty$, а если $|a| < 1$, то приближаются к нулю. Если же $|a| = 1$, то они не удаляются, но и не приближаются.

При переходе к векторному случаю, т. е. к однородным системам уравнений с постоянными коэффициентами при *k*>1, большинство этих утверждений легко обобщаются.

Если все собственные числа матрицы Ω удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_j| < 1,\ j = 1,\dots,k,$$

то любое решение $\vec{x}(n)$ системы линейных однородных конечно-разностных уравнений первого порядка (3.1) стремится к нулю при $n \to +\infty$.

Для доказательства нужно лишь перейти к базису, составленному из собственных и присоединенных векторов матрицы Ω.

К.4.4. Верно ли, что в этом случае стремление нормы $\|\vec{x}(n)\|$ к нулю обязательно монотонно?

Условие ограниченности решений в случае $|a|=1$ нуждается в уточнении. Если и только если среди собственных чисел матрицы Ω имеется кратное, и ему соответствует нетривиальная жорданова клетка (см., например, [гельф, курош]), то среди решений системы (4.1) имеются удаляющиеся от начала координат при $n \to +\infty$.

Рассмотрим в качестве примера матрицу второго порядка $\Omega = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Если в качестве начального вектора выбрать $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то получим решение $\vec{x}(n) = \Omega^n \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 0 \end{pmatrix}$ – норма такого вектора (собственного вектора матрицы Ω) не растет с ростом *n*. Однако, если выбрать в качестве начального вектор $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то получим, что $\vec{x}(n) = \Omega^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1} n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ -1 \end{pmatrix}$ – норма такого вектора (присоединенного вектора матрицы Ω) с ростом *n* растет.

В модели Фибоначчи бессмертные кролики бывают двух видов, продуктивного и непродуктивного. *Модель Лесли* (1945 и 1948) точнее учитывает распределение популяции по возрастам. Разобьем популяцию, скажем, на четыре возрастные группы, обозначив численность в каждой $\{x_j\}_{j=1}^4$ в соответствии с границами: $[0, \mathrm{n}_1]$, $[\mathrm{n}_1{+}1, \mathrm{n}_2]$, $[\mathrm{n}_2{+}1, \mathrm{n}_3]$, $[\mathrm{n}_3{+}1, \mathrm{n}_4]$.

Численность всех популяций меняется один раз в год, т. е. рассматриваются четыре функции дискретного времени $\{x_j(m)\}_{j=1}^4$, где номер года $m \in \mathbb{Z}_+$. Внутри каждой группы распределение особей по возрастам будем считать равномерным. Отсюда следует, что каждый год во вторую, третью и четвертую группы будут переходить по "возрасту" из первой, второй и третьей соответственно $\frac{\mathrm{x}_1}{n_1}, \frac{\mathrm{x}_2}{n_2 - n_1}, \frac{\mathrm{x}_3}{n_3 - n_2}$ особей.

Кроме того, следует учесть рождаемость и смертность. Пусть рожает только третья группа (коэффициент рождаемости обозначим α, и новорожденные, естественно, поступают в первую. Смертность β_j своя в каждой группе. Численность групп за год, следовательно, меняется согласно (4.1), где *матрица Лесли* Ω задается формулой:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{n_1 - 1}{n_1} - \beta_1 & 0 & \alpha & 0 \\ \frac{1}{n_1} & \frac{n_2 - n_1 - 1}{n_2 - n_1} - \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_2 - n_1} & \frac{n_3 - n_2 - 1}{n_3 - n_2} - \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_3 - n_2} & \frac{n_4 - n_3 - 1}{n_4 - n_3} - \beta_4 \end{pmatrix},$$

где вектор численности групп $\vec{X} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle^t$.

К.4.5. Запишите конечно-разностное уравнение Фибоначчи (2.4) в виде системы (из двух уравнений) типа (4.1).

Для того чтобы определить распределение $\vec{X}$ во все моменты времени m достаточно задать его в один момент, например, при $m=0$. Тогда по формуле (4.1) его можно определить при всех $m>0$, а если матрица Ω невырождена, то и при $m<0$.

Численность популяции $\vec{X}$ совпадает с нормой вектора, имеющей индекс $p=1$. Будет ли численность популяции, описываемой уравнением (4.1), со временем расти или уменьшаться? Это зависит от собственных чисел матрицы Ω.

Для простоты предположим, что матрица Ω имеет простую структуру – у нее нет жордановых клеток. Пусть $\vec{e}_k$ – собственные векторы Ω, а λ_k – соответствующие собственные числа. Перенумеруем их так, что $|\lambda_k| \ge |\lambda_{k+1}|$ при $k=1,2,3.$ Начальный вектор можно разложить по собственному базису: $\vec{X}(0)=\sum_{k=1}^{4} a_k \vec{e}_k$. Тогда $\vec{X}(m)=\sum_{k=1}^{4} a_k \lambda_k^m \vec{e}_k$. Если $a_1 \ne 0$ и $|\lambda_1|>|\lambda_2|$, то при достаточно больших m первое слагаемое будет доминировать над остальными: $|a_1\lambda_1^m| \gg |a_k\lambda_k^m|,\ k=2,3,4.$

К.4.6. Докажите это утверждение. Что изменится, если $\lambda_1=\lambda_2$, и существует (не существует) жорданова клетка, отвечающая λ_1?

К.4.7. Опишите поведение решения при $m\to+\infty$ в случае, когда $a_1=0,\ a_2\ne 0.$

Если для первого собственного числа матрицы Ω выполнено неравенство $|\lambda_1|>1$, а первый коэффициент в разложении по собственному базису отличен от нуля: $a_1\ne 0$, то норма решения растет неограниченно: $\|\vec{X}(m)\|_1\to+\infty$ при $m\to+\infty$. Это значит, что численность популяции (неотрицательная величина) неограниченно растет со временем. Если же $|\lambda_1|<1$, - будет убывать.

К.4.8. Докажите это утверждение. Оцените асимптотику $\|\vec{X}(m)\|$ при $m\to+\infty$. Проанализируйте различные сценарии при $m\to+\infty$, если $|\lambda_1|=1$.

К.4.9. Что изменится в описании динамики популяции, если одну из возрастных групп формально разделить на две (скажем, на высоких и низких) с одинаковыми параметрами рождаемости и смертности?

Модель, в которой популяция разбивается на небольшое число M возрастных групп имеет свои преимущества и недостатки. Например, при определении начального вектора $\vec{X}(0)$ нет необходимости в чрезмерно детальной информации – несомненное достоинство при практическом использовании.

Вместе с тем такая математическая модель не очень точно описывает реальную динамику. Например, при отсутствии рождаемости первая группа в реальности должна бы исчезнуть через n_1 лет, в то время как, согласно модели Лесли, она будет существовать вечно, хотя и уменьшаясь. Модель, где для всех k размер группы $n_{k+1}-n_k=1$, более адекватна.

Однако и внутри групп, относящихся к одному и тому же году рождения, могут быть какие-то мелкие различия. Дополнительную точность модели может придать и разбиение групп на подгруппы по признаку пола – коэффициенты смертности у мужчин и женщин различны. Коррективы вносят различия в численности мужчин и женщин, а также возможность полигамии. Смертность и рождаемость (а значит, и соответствующие коэффициенты матрицы Лесли) зависят от времени (может меняться экономическое положение, экологические условия, медицинское обслуживание, случаются эпидемии, войны и т. д.). Все эти детали моделью Лесли не учитываются.

Замечание 4.1. Экстремальная жара в июле и августе 2010г. привела в Москве не только к всплескам смертности и числа обращений в службу "Скорая помощь", но и изменила распределение населения города по возрастам (наиболее уязвимыми к этой длительной жаре оказались люди старших возрастов). Это, в свою очередь, привело к изменению ряда трендов медицинской статистики; см. [bykov-2015].

К.4.10. По данным, которые можно найти в демографических справочниках, определите коэффициенты матрицы Лесли для различных разбиений на возрастные группы в различных странах и проанализируйте собственные числа матрицы Ω и соответствующие собственные векторы. Насколько реальное распределение по возрастам отличается от собственного вектора $\vec{e}_1$? Верно ли (ведь от "старта" $m=0$ прошло много лет), что год от года численность всех групп умножается на λ_1?

Можно игнорировать модуль вектора $\vec{X} \neq \vec{0}$ и рассматривать точку на единичной сфере (проективном пространстве $\mathbb{R}\mathrm{P}^{M-1}$) $\vec{Y} = \vec{X} / \| \vec{X} \|$. Поскольку и координаты вектора $\vec{X}(0)$ неотрицательны, и сама *матрица* Ω *неотрицательна*, т. е. неотрицательны все ее элементы, то и векторы $\vec{X}(m) = L^m \vec{X}(0)$ тоже будут неотрицательны. Будут неотрицательны и векторы $\vec{Y}(m)$. Норму в пространстве $\mathbb{R}^M$ можно выбрать различными способами.

Пусть $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ при всех $j > 1$. Тогда при почти всех положительных векторах $\vec{X}(0)$ последовательность единичных векторов $\vec{Y}(m)$ при $m \to +\infty$ сходится к единичному собственному вектору матрицы Ω. Поскольку все эти векторы неотрицательны, значит, и предельный вектор $\vec{e}_1$ не имеет отрицательных компонент.

Более общее утверждение (не использующее строгое неравенство $|\lambda_1| > |\lambda_j|$ при $j > 1$) дает следующая теорема Фробениуса.

Для произвольной неотрицательной матрицы A можно определить собственное число $\lambda_F \geq 0$, называемое числом Фробениуса (такое что $|\lambda_F| \geq |\lambda_j|$ для всех собственных чисел λ_j), и неотрицательный собственный вектор $A\vec{X}_F = \lambda_F \vec{X}_F$, называемый вектором Фробениуса.

Матрица Ω в конечно-разностной системе (4.1) неотрицательна, если и только если все коэффициенты $\{a_j\}_{j=1}^{k}$ неположительны. В частности, это верно для систем, полученных из уравнения Фибоначчи и его обобщений.

Работе Фробениуса (1912) предшествовала работа Перрона (1907) о *положительных матрицах A*. Для матриц, все элементы которых строго положительны, можно доказать, что собственное число Фробениуса простое и положительное и все компоненты вектора Фробениуса $\vec{X}_F$ строго положительны. В этом состоит *теорема Перрона*.

Доказательства и другие приложения этих теорем о положительных и неотрицательных матрицах см. [Bellman, 1969].

К.4.11. Докажите, что компоненты собственного вектора неотрицательной матрицы, отвечающего иному собственному числу $\lambda \neq \lambda_F$, не могут быть все положительными (или все отрицательными).

В рассмотренной модели Лесли коэффициенты α, β_j постоянны. В более точных моделях стоит их считать переменными, зависящими от внешних (например, климатических) и внутренних (например, связанных с экономикой) изменений.

Пусть например, рождаемость α зависит от качества жизни, которое в разной степени обеспечивают граждане (если рассматривается человеческая популяция) или животные разных возрастов. Простейший вариант: имеется три возрастные группы (т.е. размерность матрицы Ω равна 3); воспроизводство популяции, как и благосостояние (в некоторых условных единицах), обеспечивается средней группой; рождаемость α монотонно возрастает с благосостоянием:

$$\alpha = QW(\vec{X}); \text{ где } W(\vec{p}) = \arctan\left(\frac{qx_2}{x_1 + x_2 + x_3}\right), \quad Q, q \in \mathbb{R}_+.$$

Для простоты предполагается, что смертность во всех группах не зависит от благосостояния и что произведенное членами второй группы делится на всех граждан поровну. Поскольку при сколь угодно большом благосостоянии рождаемость за год вряд ли превзойдет одного ребенка на двух родителей (возможность рождения двойни и тройни слабо скажется на реальной статистике) интерес представляет диапазон $0 < Q < 1/\pi$.

Функция $\alpha(\vec{X})$ выбрана однородной, поэтому при пропорциональном увеличении всех групп коэффициент рождаемости остается прежним.

Если при $m \to +\infty$ благосостояние стабилизируется: $W(\vec{X}(m)) \to W_\infty$, то при почти всех начальных векторах $\vec{X}(0)$ численность групп популяций будет стремиться к собственному вектору предельной матрицы Ω_∞, соответствующему собственному числу с наибольшим модулем. Здесь для предельной матрицы рождаемость равна константе QW_∞.

К.4.12 Докажите это утверждение.

Например, для значений $q = 0{,}3,\ Q = 3,\ n_1 = 20,\ n_2 = 50,\ n_3 = 90$ и $\beta_1 = 0{,}1, \beta_2 = 0{,}005$, $\beta_3 = 0{,}05$ благосостояние стабилизируется. На **рис. 4.1** показана динамика величин $p_1 = x_1/\sigma,\ p_2 = x_2/\sigma$, где $\sigma = x_1 + x_2 + x_3$.

Величины $p_1(m), p_2(m)$, которые в начальный момент были равны $0{,}84$ и $0{,}08$, соответственно, при $m \to +\infty$ стремятся к неподвижной точке с координатами $0{,}49$ и $0{,}36$. Таким образом, доля стариков в популяции выросла (см. **рис. 4.1**).

Оценка числа Фробениуса (здесь $\lambda_F \approx 1{,}03$) стабилизировавшейся матрицы Лесли Ω получается сравнением длин векторов: $\|\vec{X}(m+1)\| / \|\vec{X}(m)\|$ после достаточно большого числа итераций.

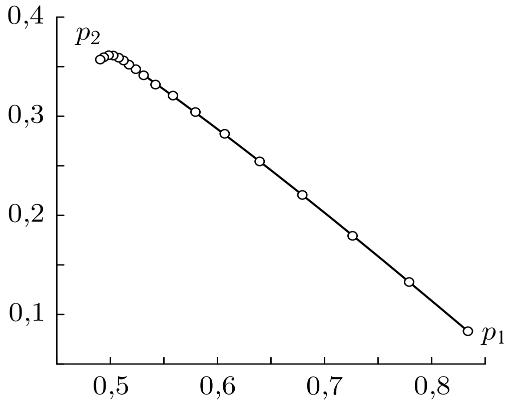

Рис. 4.1. Пример годовой динамики относительной численности групп молодежи и взрослых людей согласно модифицированной модели Лесли

К.4.12. Для модифицированной модели Лесли с этими параметрами проведите численные эксперименты при других начальных данных и постройте соответствующие диаграммы.

К.4.13. Аналитически оцените скорость сходимости к неподвижной точке в малой ее окрестности. Проверьте эту оценку на численном эксперименте.

5. Линейные неоднородные конечно-разностные уравнения со специальными правыми частями

Рассмотрим линейное неоднородное конечно-разностное уравнение (2.5) с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью:

$$u(n+k)+a_1\,u(n+k-1)+a_2\,u(n+k-2)+...+a_k\,u(n)=C\mu^n, \tag{5.1}$$

где C, μ – заданные ненулевые константы. Будем искать решение в виде, аналогичном виду правой части: $u(n)=A\mu^n$, где A – неизвестная константа. Подставим это выражение в уравнение (5.1). После простых преобразований получаем:

$$A\cdot H\left(\mu\right)\cdot\mu^n=C\cdot\mu^n.$$

Следовательно, если число μ не является корнем характеристического многочлена, то частное решение (5.1) найдено: $A=\dfrac{C}{H\left(\mu\right)}$. Пример такого рода был рассмотрен в **К.2.4.**

К. 5.1. Рассмотрим неоднородное конечно-разностное уравнение

$$u(n+k)+a_1\,u(n+k-1)+a_2\,u(n+k-2)+...+a_k\,u(n)=Cn\mu^n, \tag{5.2}$$

где число $\mu\in\mathbb{C}$ не является корнем характеристического многочлена конечно-разностного уравнения: $H\left(\mu\right)\neq 0$, $C\neq 0$. Докажите, что уравнение (5.2) имеет частное решение вида $u(n)=(A+Bn)\mu^n$ и определите константы A и B.

К. 5.2. Пусть снова $H\left(\mu\right)\neq 0$. Найдите частное решение уравнения

$$u(n+k)+a_1\,u(n+k-1)+a_2\,u(n+k-2)+...+a_k\,u(n)=C(n)\mu^n, \tag{5.3}$$

где $C(n)$ – заданный многочлен от n степени p.

6. Линейные однородные конечно-разностные уравнения с постоянными коэффициентами – кратные корни

Если у однородного конечно-разностного уравнения порядка k среди корней характеристического уравнения $H(\lambda)=0$ имеются и кратные, то различных решений вида $Y_j(n)=C_j\lambda_j^n$ меньше k. Поэтому они не смогут составить базис в k-мерном подпространстве решений линейного однородного конечно-разностного уравнения k-го порядка (2.6).

Пусть λ_1 – корень кратности два квадратного характеристического многочлена H.

Лемма. В этом случае функция вида $Z(n)=Bn\lambda_1^n$ является решением однородного уравнения (2.6), наряду с решением $Y(n)=A\lambda_1^n$.

Доказательство. По лемме Безу многочлен H можно представить в виде произведения $H(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2Q(\lambda)$, где Q – какой-то многочлен. Пусть далее T – линейный оператор в пространстве бесконечных последовательностей: он прибавляет 1 к индексу в последовательности $u(n)$, т. е. $T\left[u(n)\right]=\left[u(n+1)\right]$. Оператор T можно возвести произвольную степень j (это сдвиг аргумента на j) Конечно-разностное уравнение (2.6) можно переписать в виде

$$H(T)[u]=Q(T)(T-\lambda_1)^2[u]=0\,.$$

Следовательно, если последовательность $y(n)$ удовлетворяет однородному конечно-разностному уравнению $\left(T-\lambda_1\right)^2 y=0$, то она удовлетворяет и уравнению (2.6). Определим общее решение конечно-разностного уравнения второго порядка:

$$\left(T-\lambda_1\right)^2 y=0 \Leftrightarrow w=\left(T-\lambda_1\right)y,\ \left(T-\lambda_1\right)w=0 \Rightarrow w(n)=C\lambda_1^n,\ \left(T-\lambda_1\right)y=w.$$

Последнее конечно-разностное уравнение (первого порядка) для $y(n)$ имеет вид (5.1), но λ_1 – корень характеристического уравнения. Будем искать частное решение этого неоднородного уравнения в виде $y_{частное}(n)=Bn\lambda^n$. Подставим:

$$y(n+1)-\lambda_1\, y(n)=A(n+1)\lambda_1^{n+1}-\lambda_1\, An\lambda_1^n=\lambda_1\, A\lambda_1^n\,.$$

Положим $B=C/\lambda_1$ и получим искомое частное решение уравнения $\left(T-\lambda_1\right)y=w.$

Таким образом, общее решение линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и кратным корнем характеристического уравнения (3.1) имеет вид $y_{общее}(n)=Bn\lambda_1^n+A\lambda_1^n$, где A, B – произвольные константы.

Аналогично определяем общее решение в случае корней однородного конечно-разностного уравнения с характеристическим корнем кратности k – общее решение имеет вид

$$y_{общее}(n)=C_1\lambda_1^n+C_2n\lambda_1^n+\ldots C_kn^{k-1}\lambda_1^n, \tag{6.1}$$

где $\left\{C_j\right\}_{j=1}^k$ произвольные константы. Поскольку константы $\left\{C_j\right\}_{j=1}^k$ произвольны, мы получаем k-мерное подпространство решений уравнения (2.6).

Общее решение для самого общего случая однородного конечно-разностного уравнения (2.6) (когда есть несколько корней характеристического многочлена с различными кратностями) теперь уже очевидно.

Решение начальной задачи (задачи Коши) по значениям $u(0), u(2), ..., u(k-1)$ определяется и притом единственным образом и для однородного уравнения (2.6), и для неоднородного уравнения (2.5) при любом наборе кратностей корней характеристического многочлена.

Различие между случаями системы (4.1) и уравнения (2.6) при наличии кратных корней характеристического уравнения: у системы (4.1) возможна жорданова клетка, но также возможно, что имеется несколько клеток размерности 1. У уравнения (2.6), если его представить в виде системы, наличие кратного корня неизбежно означает наличие клетки максимальной размерности и существование решения вида (6.1).

К.6.1. Какие конечно-разностные уравнение (2.6) и система (4.1) могут иметь характеристический многочлен $H(\lambda)=(\lambda-1)^2$?

К.6.2. Пусть μ – корень характеристического многочлена конечно-разностного уравнения: $H(\mu)=0$, причем μ - корень кратности *d*. Найдите частное решение уравнения (5.3).

К. 6.3. Пусть уравнению (2.6) отвечает характеристическое уравнение (3.1), среди корней которого имеется хотя бы один кратный корень λ с модулем, равным 1. Докажите существование неограниченно растущего решения уравнения (2.6) при $n \to \pm\infty$.

7. Вероятность выигрыша 1-го игрока

Вернемся к линейному однородному конечно-разностному уравнению (2.1). Граничные условия для задачи оценки вероятности победы первого игрока:

$$P(0)=0,\ P(N)=1\,. \qquad (7.1)$$

Характеристический многочлен для уравнения (2.1) – квадратный многочлен $H(\lambda)=q\lambda^2-\lambda+(1-q)$. Сумма коэффициентов этого многочлена равна нулю[3], а значит, $\lambda_1=1$ – корень многочлена *H*. Второй корень многочлена (см. **рис. 7.1**) можно найти, решив квадратное уравнение. Также можно использовать теорему Виета: $\lambda_2=\dfrac{1-q}{q}$.

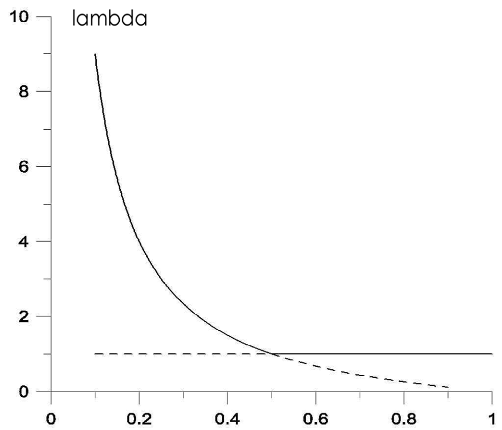

Рис. 7.1. Характеристические числа $\lambda_1(q)\equiv 1$ и $\lambda_2=\lambda_2(q)$ для конечно-разностного уравнения (2.1). Второе число λ_2 убывает с ростом значения *q* – вероятности выигрыша в одном розыгрыше. Корни кратные при *q*=1/2. Сплошная линия – больший корень, пунктир – меньший.

[3] Это следует из вероятностной интерпретации уравнения (1): суммы вероятностей слева и справа равны.

Пусть $q \neq 1/2$. Тогда корни характеристического многочлена простые, $\lambda_2 \neq 1$, и общее решение уравнения (1) имеет вид: $U(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$. Использовав граничные условия (7.1), получаем систему двух линейных алгебраических уравнений для констант C_1, C_2:

$$C_1 + C_2 = 0,\ \ C_1 + C_2\lambda_2^N = 1. \tag{7.2}$$

Таким образом, единственное решение задачи (2.1, 7.1):

$$P(n) = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1^N - \lambda_2^N} = \frac{1-\lambda_2^n}{1-\lambda_2^N}. \tag{7.3}$$

На **рис. 7.2**. приведены графики зависимости вероятности победы первого игрока при q=1/3 и q=2/3. Нетрудно показать, что эти два графика окажутся симметричными относительно центра рисунка (но не относительно диагонали!).

При q=1/2 корни характеристического многочлена кратные, и общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$P(n) = C_1\lambda^n + C_2 n\lambda^n = C_1 + C_2 n.$$

Из граничных условий (7.1) получаем (см. **рис. 7.2**.) единственное решение задачи – линейную функцию:

$$P(n)=n/N, \tag{7.4}$$

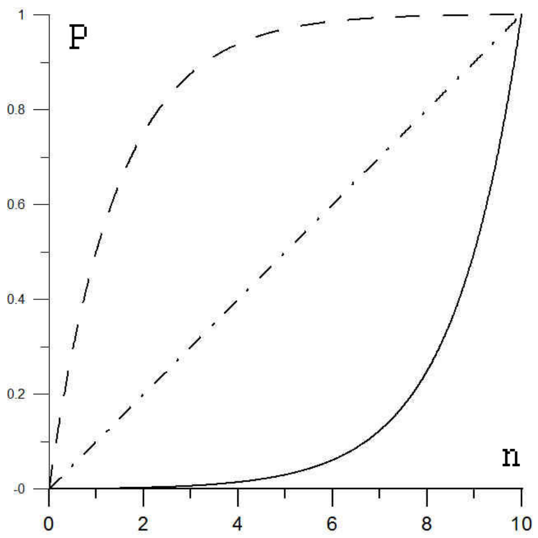

Рис. 7.2. Вероятность выигрыша первого игрока в зависимости от имеющегося у него числа ставок n. Здесь N=10, q =1/3 – сплошная линия ($\lambda_2 = 2$), q=1/2 – штрих-пунктир ($\lambda_2 = 1$), q=2/3 – пунктир ($\lambda_2 = 1/2$).

Сопоставим решения при значениях параметра q=1/2 и при значениях, близких, но не равных ½. Покажем, что при всем внешнем различии формул для случаев простых и кратных корней, графики $P(n)$ оказываются близкими.

Преобразуем формулу (7.3):

$$P(n) = \frac{1-\lambda_2^n}{1-\lambda_2^N} = \frac{(1-\lambda_2)\left[1+\lambda_2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_2^{n-1}\right]}{(1-\lambda_2)\left[1+\lambda_2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_2^{N-1}\right]} \approx \frac{n}{N},$$

поскольку при $q \approx 1/2$, то $\lambda_2 \approx 1$, и все слагаемые в квадратных скобках близки к 1.

К.7.1. Пусть $\varepsilon = q - 1/2$. Докажите, что при $\varepsilon \to 0$ верна оценка $P(n) = \frac{n}{N} + A\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right)$, и оцените константу *A=A(n,N).*

Эволюцию вероятностей победы 1-го игрока можно вычислить и иным способом. Частица может находиться в любой точке с некоторой вероятностью. Распределение вероятностей можно описать вектором $\vec{p} = \left\langle p_0, p_1, ..., p_N \right\rangle^t$. У такого вектора все компоненты неотрицательны, а их сумма равна 1. Такие *векторы* называются *вероятностными.*

Примеры. 1) Точно известно, что частица находится в точке с номером *n*. Тогда у вектора $\vec{p}$ компонента с номером *n* равна 1, а остальные равны 0. 2) Частица с вероятностями ½ находится в точках с номерами n_1 и n_2. Тогда у вектора $\vec{p}$ компоненты с номерами n_1 и n_2 равны ½ , а остальные равны 0.

Если в какой-то момент времени $t = m\tau$ вектор $\vec{p} = \vec{p}(m)$ задан, то через один такт (через один гейм) – при $t = (m+1)\tau$ – распределение вероятностей будет определяться вектором $\vec{p}(m+1) = C\,\vec{p}(m)$, где квадратная матрица *C* размерности *N+1* имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1-q & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & . & . & : \\ 0 & q & . & . & 0 & : \\ 0 & 0 & . & 0 & 1-q & 0 \\ : & : & . & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & q & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}(m) = C^m \vec{p}(0).$$

Можно доказать, что при $m \to +\infty$ последовательность векторов сходится: $\vec{p}(m) \to \vec{p}_\infty$, причем предельный вектор зависит от начального вектора $\vec{p}(0)$.

Если начальный вектор такой, как в примере 1), то предельный вектор имеет вид $\vec{p}_\infty = \left\langle 1 - P(n), 0, ..., P(n) \right\rangle^t$, где вероятность *P(n)* при $q \neq 1/2$ задается формулой (5.1), а при *q*=1/2 формулой *P(n)=n/N.*

Если начальный вектор такой, как в примере 2), то

$$\vec{p}_\infty = \left\langle 1 - \frac{P(n_1) + P(n_2)}{2}, 0, ..., \frac{P(n_1) + P(n_2)}{2} \right\rangle^t.$$

Доказательство факта сходимости при $m \to +\infty$ можно получить из оценки собственных чисел матрицы *C*: два из них равны 1, а модули остальных меньше 1. Подробнее см., например, [Гордин, 2005, 2010].

К.7.2. Докажите эти утверждения. Какие собственные векторы матрицы *C* отвечают собственному числу $\lambda = 1$?

К.7.3. Вычислите остальные собственные числа матрицы *C*.

К.7.4. Укажите формулу для предельного вектора при произвольном начальном векторе $\vec{p}(0)$, если функция *P(n)* известна.

8. Повышать или понижать ставку? Кому что выгодно?

Предположим, что у двух игроков имеется *n* и *N-n* ставок, соответственно, но они могут поделить размер ставки пополам. Или пусть частица передвигается скачками половинной длины. Соответствующие вероятности победы первого игрока (попадания частицы в правый край отрезка) обозначим $\tilde{P}$. При том же распределении денежных сумм у игроков (том же положении частицы на отрезке прежней длины), но при половинной ставке (если частица делает скачки половинной длины) оба числа, и *n,* и *N-n*, удвоятся. Изменит ли такое уполовинивание ставок (и удлинение игры) вероятность выигрыша, и в чью пользу. Интуитивный ответ: вероятность не изменит, т. е. $\tilde{P}(2n) = P(n)$, – только играть будут дольше. Но этот ответ оказывается верным только в одном случае: при $q = 1/2$.

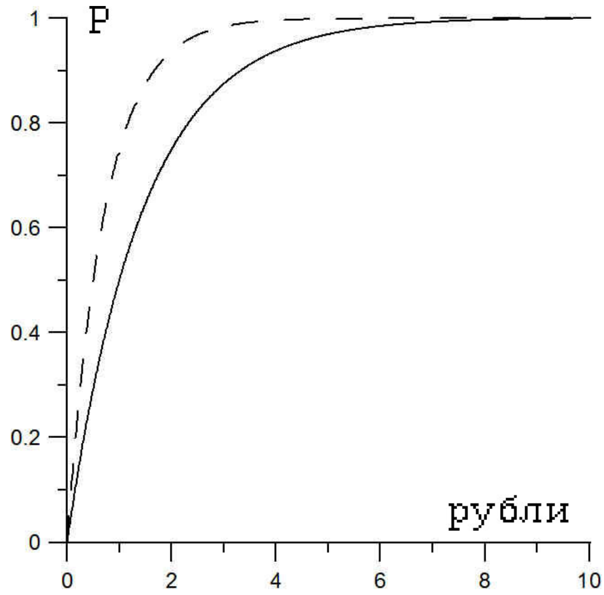

Рис. 8.1. Вероятность выигрыша первого игрока при наличии у него *n* рублей. У его противника имеется *N-n* рублей. Они выбирают в качестве одной ставки 1 рубль (сплошная линия) или 50 копеек (пунктир). В обоих случаях здесь полагаем вероятность выигрыша первого игрока в одном розыгрыше (гейме) *q=2/3; N*=10. Видно, что если игра еще не закончена, т. е. при *N*>*n*>0 уменьшение ставки выгодно первому игроку.

Действительно, в последнем случае получаем $\tilde{P}(2n) = \frac{2n}{2N} = \frac{n}{N}$. В остальных случаях ситуация иная:

$$\tilde{P}(2n) = \frac{1-\lambda_2^{2n}}{1-\lambda_2^{2N}} = \frac{1-\lambda_2^{n}}{1-\lambda_2^{N}} \cdot R = P(n)\cdot R, \quad R = \frac{1+\lambda_2^{n}}{1+\lambda_2^{N}}.$$

В зависимости от величины множителя *R* переход к половинной ставке выгоден первому или второму игроку. Если первый игрок играет лучше второго, т. е. при $1>q>1/2$, корень $\lambda_2 \in (0,1)$ (см. **рис. 7.1**), а значит, при $n<N$ выполняется неравенство $\lambda_2^n > \lambda_2^N$. Следовательно, множитель $R>1$. Если же первый игрок играет хуже второго, то ½>q>0, откуда $\lambda_2 > 1 \Rightarrow \lambda_2^n < \lambda_2^N$. Итак, уменьшение ставки при сохранении стартовых сумм выгоднее тому игроку, который играет лучше.

К. 8.1. Докажите аналогичное утверждение при уменьшении ставки в *k* раз.